



## Sujets d'examen

---

### Partiel

#### Exercice 1

---

Soit  $D$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Donner la définition de “ $D$  est ouvert.” (Ceci est une question de cours!)
2. Donner la définition de “ $a \in \mathbb{R}^2$  est un point adhérent de  $D$ .” (Ceci est une question de cours!)

On considère dans la suite de l'exercice l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq |y|, x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

3. Dessiner  $D$ .
4. Montrer que  $D$  n'est pas ouvert.
5. Déterminer  $\overline{D}$ , l'adhérence de  $D$ . On justifiera brièvement sa réponse, en s'aidant d'un dessin.

[002647]

---

#### Exercice 2

---

On considère la fonction  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

1. Tracer les lignes de niveau  $f(x, y) = 2$ ,  $f(x, y) = 4$ .
2. Tracer le graphe de la fonction  $f$ . Expliquer votre dessin en quelques phrases, en identifiant notamment les intersections du graphe de  $f$  avec les plans parallèles aux trois plans des coordonnées.

[002648]

---

#### Exercice 3

---

On considère une suite  $(u_n)_n$ , de terme général  $u_n \in \mathbb{R}^2$ .

1. Donner la définition de convergence pour une telle suite. (Ceci est une question de cours!)
2. Soit la suite de terme général  $u_n = (\text{th}(n), \cos(n) \exp(-n^2))$ . Étudier sa convergence.

[002649]

---

#### Exercice 4

---

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^2 y}{x - y}, \quad \text{si } x \neq y \\ &= x, \quad \text{si } x = y. \end{aligned}$$

1. Calculer les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -2)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -2)$ .

2. Pour tout  $v = (\cos \theta, \sin \theta)$ , calculer  $D_v f(1, -2)$ . Pour quelles valeurs de  $\theta \in [0, 2\pi[$ ,  $D_v f(1, -2) = 0$  ?
3. Étudier la continuité de  $f$  au point  $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ .
4. Étudier la continuité de  $f$  au point  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ .
5. Montrer que les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existent et les déterminer.
6. Montrer que la dérivée directionnelle  $D_v f(0, 0)$  existe pour  $v = (1, 1)$ , et la déterminer. On constatera que l'égalité  $D_v f(0, 0) = \partial_x f(0, 0) + \partial_y f(0, 0)$  n'est pas satisfaite. Expliquer pourquoi cela ne contredit aucun théorème du cours.

[002650]

## Examen

### Exercice 5

1. Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $a \in D$ . Donner la définition de “ $f$  est différentiable en  $a$ ”.
2. Montrer que, si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors toutes ses dérivées partielles existent. Exprimer le lien entre la différentielle  $df_a$  de  $f$  en  $a$  et les dérivées partielles de  $f$  en  $a$ .
3. Les affirmations suivantes, sont-elles vraies ou fausses? On justifiera brièvement sa réponse.
  - (A) Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors elle y est continue.
  - (B) Si toutes les dérivées partielles de  $f$  en  $a$  existent, alors  $f$  est différentiable en  $a$ .

[002651]

### Exercice 6

Utiliser une approximation affine bien choisie pour calculer une valeur approchée de

$$\exp[-0.02\sqrt{4.03}].$$

[002652]

### Exercice 7

On considère la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation

$$y^2(x^2 + 1) + x^2(y^2 + 1) = 1.$$

1. Montrer qu'il existe un unique  $b > 0$  tel que le point de coordonnées  $(1/2, b)$  se trouve sur  $\mathcal{C}$ . Déterminer  $b$ , puis déterminer l'équation de la droite tangente à  $\mathcal{C}$ , passant par  $(1/2, b)$ .
2. Trouver l'unique fonction  $\varphi : x \in ]-1, 1[ \rightarrow \varphi(x) \in \mathbb{R}^+$  telle que  $(x, \varphi(x)) \in \mathcal{C}$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ . Montrer que  $\varphi(-x) = \varphi(x)$  et que  $\varphi$  est décroissante sur  $[0, 1[$ . Tracer  $\mathcal{C}$ .
3. Énoncer le théorème des fonctions implicites et montrer qu'il existe exactement deux points de la courbe  $\mathcal{C}$  où le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas pour écrire, au voisinage de chacun de ces deux points,  $y$  comme fonction de  $x$ .

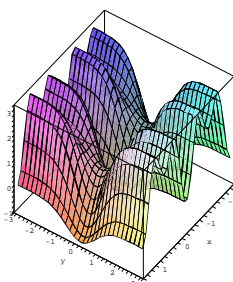
[002653]

### Exercice 8

On considère la fonction

$$f(x,y) = (1 + 2 \cos^2(\pi x))(1 - \exp(-y^2)) + \sin(\pi x).$$

Son graphe est reproduit dans la figure ci-dessous.



1. Trouver tous les points critiques de  $f$  et déterminer leur nature. Vos résultats sont-ils compatibles avec le graphe de la fonction, reproduit ci-dessus?
2. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de  $f$  au point de coordonnées  $(1, 1, f(1, 1))$ . Tracer la droite d'intersection de ce plan avec le plan  $xOy$ .

[002654]

---

### Exercice 9

On considère les quatre surfaces  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ , définies par les équations suivantes:

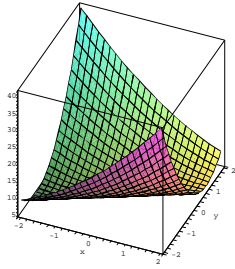
$$z^2 - \exp(2x^2 + y^2) = 0 \quad (\Sigma_1)$$

$$z = x^2 + 3y^2 + 4 \quad (\Sigma_2)$$

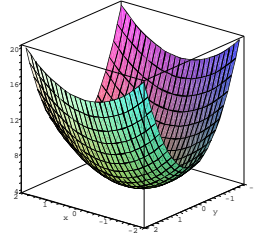
$$z - (x - 2y)^2 - 4 = 0 \quad (\Sigma_3)$$

$$\exp(x^2 + y^2) + \exp(y^2 + z^2) = 3 \quad (\Sigma_4)$$

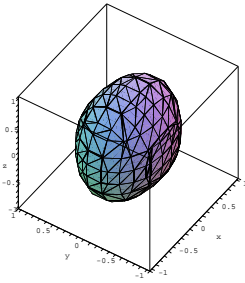
Les quatre surfaces sont tracées dans les parties A, B, C et D de la figure sur la page suivante. Indiquer quelle surface correspond à quelle partie de la figure. On justifiera très brièvement ses réponses.



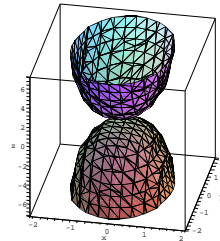
A



B



C



D